گرافیک دو بعدی ۲

تبدیل‌های دو بعدی

در درس قبل با سه نوع تبدیل معروف که می‌توانند روی نقاط یک شکل اعمال شوند و شکل آن را تغییر دهند، آشنا شدیم.

1. جابجایی (Translation)

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

2. چرخش (Rotation)

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

3. بزرگ نمایی (Scaling)

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

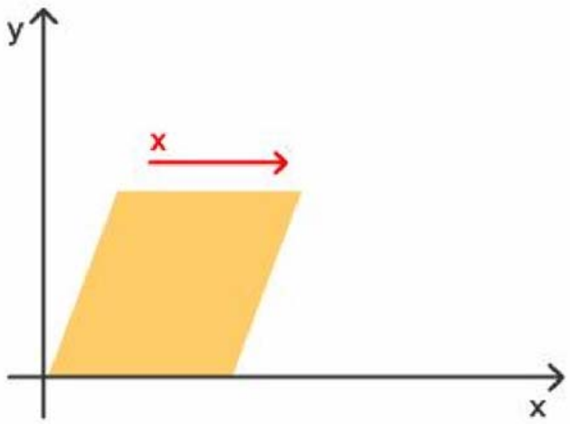
هر تبدیل را به فرم یک ماتریس ۳ در ۳ نمایش دادیم.

با انجام یک عمل ضرب روی ماتریس تبدیل و **مختصات** نقطه، نقطه جدید را بدست آوردیم.

بررسی شد که به دلیل **آنکه** می‌توان تبدیل انتقال را در ماتریس ۳ در ۳ به صورت ضرب بیان کرد، به جای ماتریس‌های ۲ در ۲، از ماتریس‌های ۳ در ۳ استفاده می‌کنیم.

تبدیل Shearing

در این تبدیل معمولا مختصات یک بعد از شکل به صورت ساده باقی مانده **و مختصات آن در بعد دیگر به** صورت ترکیب خطی از مختصات اول بیان خواه



$$y' = y$$

$$x' = x + y * h$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

تبدیل‌های دو بعدی

خواص تبدیل Shearing

1. یک دوران دو بعدی، از سه تبدیل Shear متوالی تشکیل شده است.
2. تبدیل Shearing مساحت شکل را تغییر نمی‌دهد.

3. می‌توان هر تبدیل Shearing دو بعدی را می‌توان به صورت چند تبدیل متوالی (دوران، Scaling، دوران) بیان کرد.

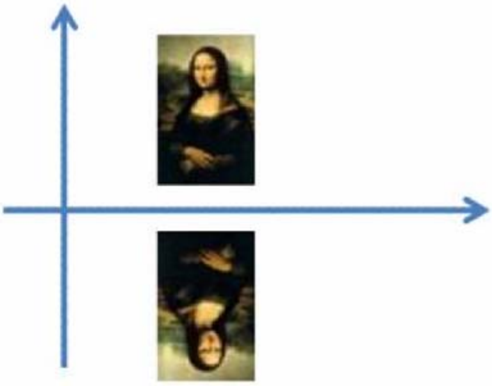
تمرین

سه خاصیت گفته شده برای Shearing را اثبات کنید.

انعکاس (Reflection)

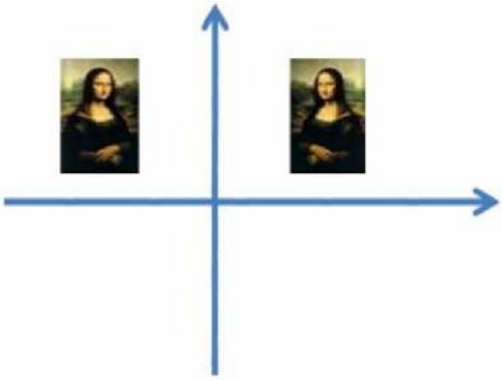
یکی دیگر از تبدیلاتی که روی شکل‌های دو بعدی می‌تواند صورت گیرد، انعکاس نسبت به یک خط خاص می‌باشد.

مثال



$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

مثال



$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

تمرین

ماتریس انعکاس نسبت به خط $x = a$ و خط $y = b$ را حساب کنید.

گرافیک دو بعدی ۲

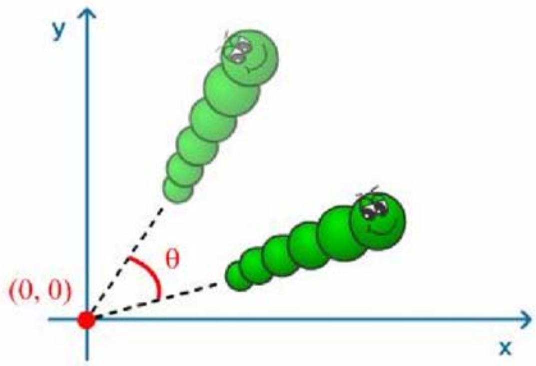
تبدیل‌های دو بعدی

تبدیل دوران

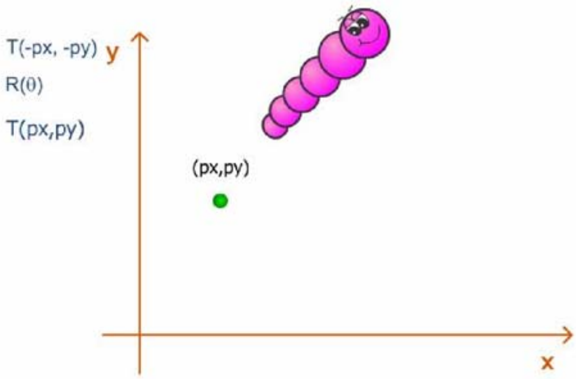
دوران یک تصویر را حول محور مختصات دوران می‌دهد.

تبدیل دوران

$$\begin{matrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$



یک شکل را چگونه می‌توان حول مرکز خودش و یا حول یک نقطه خاص دوران داد؟
سوال



$$\overset{}{\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}} = \underset{}{\overset{T(-px,\,-py)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -px \\ 0 & 1 & -py \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \overset{R(\theta)}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \overset{T(-px,\,-py)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -px \\ 0 & 1 & -py \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \overset{T(px,\,py)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & px \\ 0 & 1 & py \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \overset{R(\theta)}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \overset{T(-px,\,-py)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -px \\ 0 & 1 & -py \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \boxed{\overset{T(px,\ py)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & px \\ 0 & 1 & py \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \overset{R(\theta)}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \overset{T(-px,\ -py)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -px \\ 0 & 1 & -py \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}}
$$

$$
P' = T(px,py)\ R(\theta)\ T(-px,\ -py) * P
$$

تمرین

با توجه به مثالی که گفته شد، ماتریس ۳ در ۳ برای دوران یک نقطه حول نقطه (px,py) به اندازه زاویه θ را بدست آورید.

تبدیل‌های دو بعدی

بزرگ نمایی (Scaling)

زمانی که ماتریس Scaling را روی یک شکل اعمال می‌کنیم، این شکل نسبت به نقطه (0 ,0) بزرگ نمایی یا کوچک نمایی می‌کند.

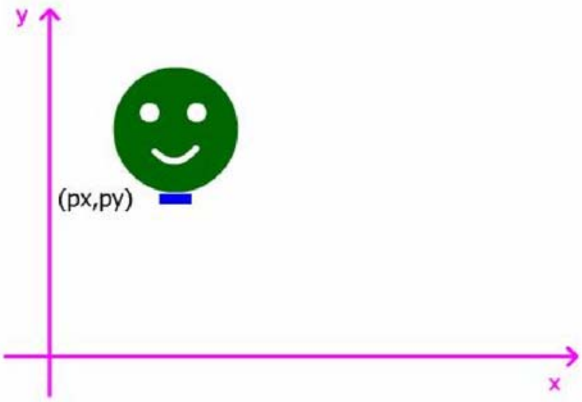
چگونه می‌توانیم شکل را حول یک نقطه دلخواه **Scale** کنیم؟

بزرگ نمایی (Scaling)

T(-px, -py)

S(sx, sy)

T(px,py)



تمرین

ماتریس‌های لازم برای Scaling یک شکل حول نقطه (px,py) را بنویسید.

ماتریس حاصل ضرب را به صورتی که با ضرب ماتریس ۳ در ۳ با مختصات شکل بتوان شکل **Scale** شده را بدست آورد.

تبدیل‌های نسبی (Affine)

تمام تبدیل‌هایی که بررسی شد به تبدیل‌های نسبی یا Affine معروف هستند.

تبدیل‌های نسبی (Affine)

تبدیلی است که در آن نقطه P' (x',y') به صورت یک ترکیب خطی از نقطه P (x,y) نوشته شود.

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

هر تبدیل نسَبی از چند تبدیل متوالی تشکیل شده است:

1. دوران
2. Scaling
3. Shearing
4. انتقال

Affine matrix = translation x shearing x scaling x rotation

به فرایند اعمال کردن چند تبدیل به صورت متوالی روی یک نقطه و بدست آوردن یک تبدیل کلی، ترکیب تبدیل‌ها گفته می‌شود.

اگر بخواهیم تبدیلی روی نقطه‌ای به نام P با استفاده از ماتریسی به نام M1 انجام بدهیم، سپس تبدیل دیگری با استفاده از ماتریس M2 انجام دهیم و بعد از آن تبدیل دیگری با استفاده از ماتریس M3 انجام دهیم، می‌توانیم آنها را با استفاده از حاصل ضرب ماتریس‌ها بدست آوریم.

(M3 x (M2 x (M1 x P))) = M3 x M2 x M1 x P

تبدیل‌های نسبی (Affine)

$$(M3 \times (M2 \times (M1 \times P)))$$

$$M3 \times M2 \times M1 = (M3 \times M2) \times M1 = M3 \times (M2 \times M1)$$

تبدیل‌های ترکیبی خاصیت جابجایی ندارند.

$$A \times B \neq B \times A$$

شرایطی وجود دارد که می‌توان از خاصیت جابجایی استفاده کرد.

مثال

اگر A و B دو تبدیل باشند، در حالتی که این دو تبدیل هر دو انتقال و یا بزرگ نمایی باشند، می‌توان از خاصیت بزرگ‌نمایی استفاده کرد.

اگر تبدیل‌های A و B از جنس Scaling باشند، می توان خاصیت جابجایی را برای آنها در نظر گرفت.

اگر تبدیلات A و B هر دو دوران باشند، می‌توان برای آنها خاصیت جابجایی را به کاربرد.

اگر تبدیل A، **Uniform scaling** باشد و ماتریس B عملیات Rotation باشد، عملیات جابجایی برای این دو صادق خواهد بود.

تمرین

برای حالتی که A تبدیل Uniform scaling و B تبدیل Rotation می‌باشد، خاصیت جابجایی را اثبات کنید.

چگونه می‌توان تشخیص داد که یک تصویر تبدیل یافته آیا تبدیلی Affine می‌باشد یا خیر؟

باید بررسی شود مختصات ماتریسی سه نقطه از تصویر اصلی و تصویر تبدیل یافته به چه صورت نوشته می‌شود.

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p}_x & \hat{q}_x & \hat{r}_x \\ \hat{p}_y & \hat{q}_y & \hat{r}_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

گرافیک دو بعدی ۲

برخی خواص تبدیل های دو بعدی

در درس های گذشته تعدادی از تبدیل های دو بعدی را بررسی کردیم:

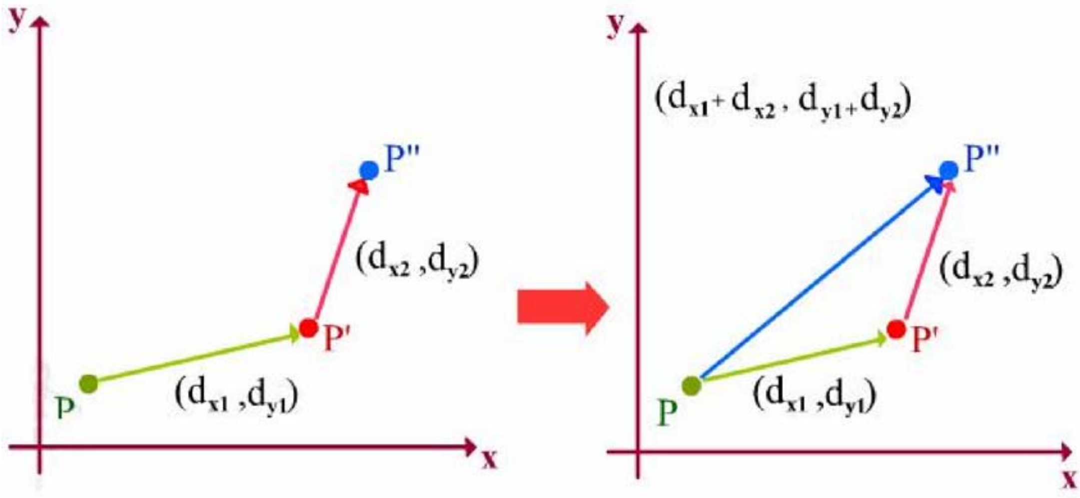
1. تبدیل انتقال
2. تبدیل دوران یا چرخش
3. تبدیل بزرگ‌نمایی یا (scaling)

هدف، بررسی خواص انواع تبدیل ها می باشد.

تبدیل انتقال را در فرم ماتریسی به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x' &= x + d_x \\ y' &= y + d_y \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



فرم ماتریسی تبدیل

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \,.\, P$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \,.\, P'$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \,.\, T(d_{x1}, d_{y1}) \,.\, P = T(d_{x1}+d_{x2}, d_{y1}+d_{y2}) \,.\, P$$

$$\Downarrow$$

$$T(d_{x1}, d_{y1}) \,.\, T(d_{x2}, d_{y2}) = T(d_{x1}+d_{x2}, d_{y1}+d_{y2})$$

$$T(d_{x1}, d_{y1}) \,.\, T(d_{x2}, d_{y2})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1}+d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1}+d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ترکیب انتقال می‌توان چند انتقال را به صورت حاصل ضرب ماتریس های انتقال ویا ماتریس انتقال برای حاصل جمع انتقال ها نوشت .

برخی خواص تبدیل های دو بعدی

سایر خواص تبدیل انتقال ها

ماتریس همانی I که در بخش مروری بر ماتریس ها مطالعه شد.

$$1.\ T(0,0) = I$$

$$2.\ T(s_x, s_y) \cdot T(t_x, t_y) = T(s_x + t_x, s_y + t_y)$$

$$3.\ T(s_x, s_y) \cdot T(t_x, t_y) = T(t_x, t_y) \cdot T(s_x, s_y)$$

$$4.\ T^{-1}(s_x, s_y) = T(-s_x, -s_y)$$

حالت دو در دو:

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

حالت سه در سه:

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید مانند مثال انتقال می‌خواهیم ببینیم، ترکیب scale کردن به صورت ریاضی به چه صورت خواهد بود.

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$$

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P'$$

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$$

$$S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})$$

$$\begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot S(s_{x2}, s_{y2}) = S(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2})$$

برای محاسبه ماتریس تبدیل چند scale پشت سرهم، از ماتریس تبدیل scale و با حاصل ضرب ضرایب تمامی ماتریس های scale استفاده می‌کنیم .

برخی خواص تبدیل های دو بعدی

تابع تبدیل چرخش یا دوران (Rotation)

در دروس قبلی دیدیم که ماتریس دوران یا چرخش حول مبدامختصات به اندازه‌ی زاویه‌ی θ برای نقطه (y , x) برابر بود با ماتریس زیر:

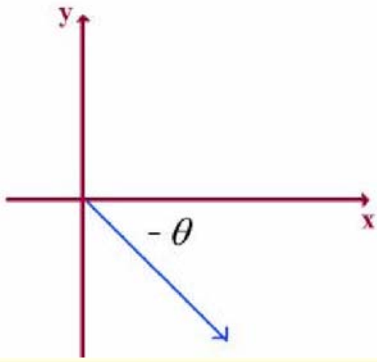
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خاصیت ماتریس دوران این است که :

$$R^{-1}(\theta) = R\ (-\theta)$$

$$R^{-1}(\theta) = \boxed{R^{T}(-\theta)}$$

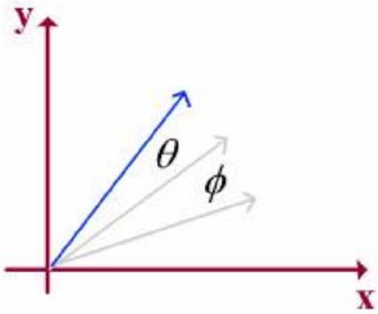


$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \boxed{R^{T}(\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos{-\theta} & -\sin{-\theta} & 0 \\ \sin{-\theta} & \cos{-\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{R(0) = I}$

$$R(\theta)\,.R(\phi) = R(\theta + \phi)$$



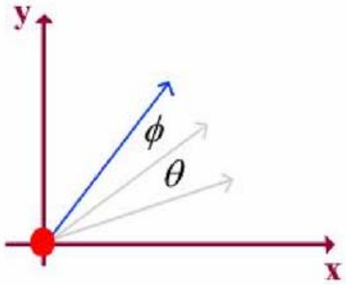
تمرین

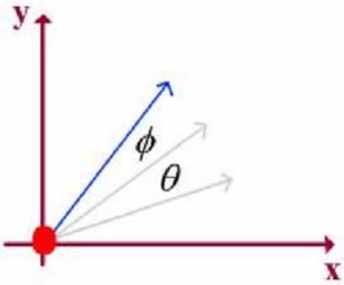
ثابت کنید که $R(\theta)\,.R(\phi) = R(\theta + \phi)$ است.

برخی خواص تبدیل های دو بعدی

خاصیت جابجایی در تبدیل ها

$$R(\theta)\,.R(\phi)=R(\phi)\,.\,R(\theta)$$





خاصیت های مشترک تبدیل های دوران و انتقال:

1. **زاویه ها و فاصله ها پس از تبدیل حفظ می شوند.**
2. **فاصله بین نقاط دستخوش تغییر نخواهد شد.**
3. **مربع واحد همیشه مربع واحد خواهد بود.**

زوایا و فواصل فقط دردوران وانتقال یاترکیب این دو تبدیل حفظ خواهد شد ولی اگرترکیبی ازدوران، انتقال و بزرگ نمایی(Scaling) داشته باشیم دراین صورت زوایا و فواصل حفظ نخواهند شد.

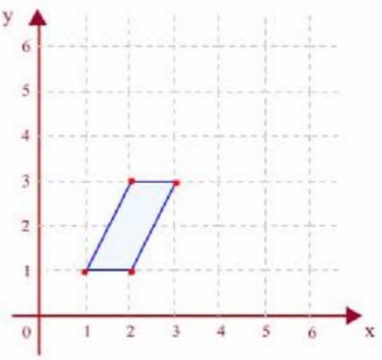
درترکیب سه تبدیل دوران، انتقال و بزرگ نمایی خاصیت خط‌های موازی حفظ خواهد شد. این سه تبدیل جز تبدیل های Affine به حساب می‌آیند.

برخی خواص تبدیل های دو بعدی

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

شکل A را به اندازه ۹۰ درجه حول مرکز مختصات دوران داده، سپس به اندازه بردار (۳،۴) انتقال داده و در نهایت با ضریب ۲ آن را Scale کنید.



● **قدم اول:**

-تبدیل ماتریس مختصات نقاط شکل به ماتریس همگن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ \boxed{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \end{bmatrix}$$

● قدم دوم:

-محاسبه ماتریس دوران

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

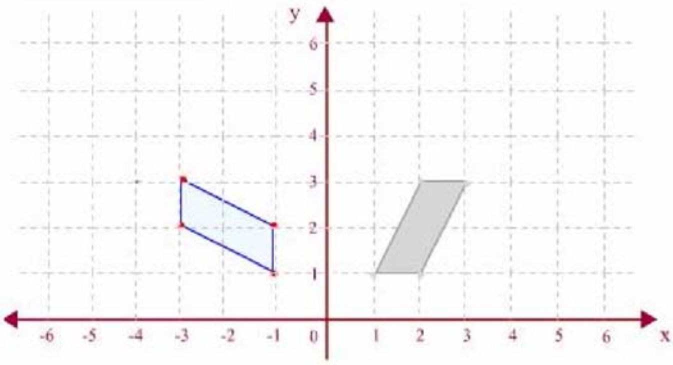
$$\theta=90 \;=\pi/2 \;\Rightarrow R(\pi/2)=\begin{bmatrix}\cos{}^{\pi}/_{2} & -\sin{}^{\pi}/_{2} & 0\\ \sin{}^{\pi}/_{2} & \cos{}^{\pi}/_{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

● قدم سوم - دوران:

-محاسبه مقادیر نقاط دوران یافته : 'A

$$A'=R({}^{\pi}/_{2})\cdot A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -3 & -3\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$



● قدم چهارم:

-محاسبه ماتریس انتقال

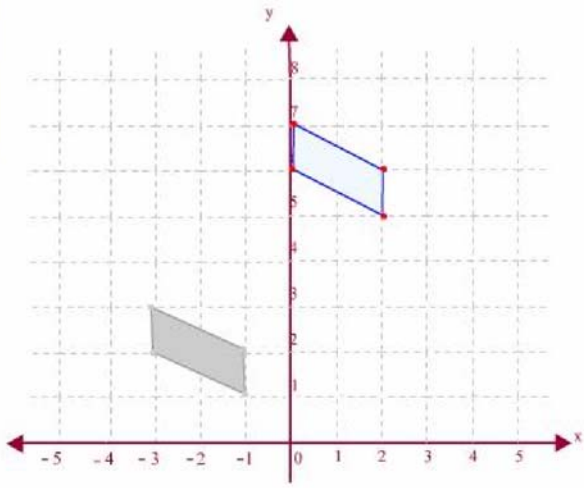
$$\boxed{T(3\,,4)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

• قدم پنجم:

-محاسبه مقادیر نقاط انتقال یافته: A''

$$A'' = T\ (3,4) \times A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



• قدم ششم:

-محاسبه ماتریس Scale

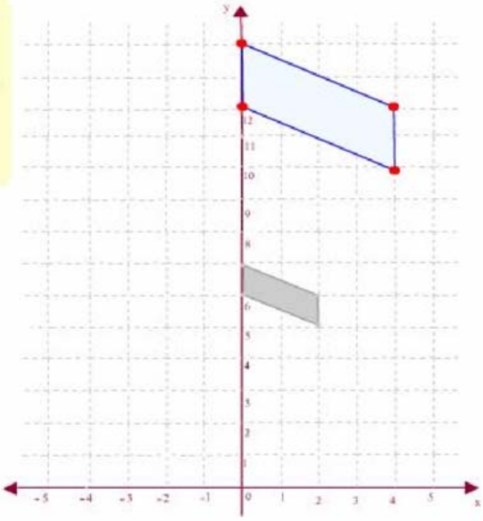
$$S\ (2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- قدم هفتم:

- محاسبه مقادیر نقاط Scale شده : A'''

$$A''' = S(2,2) \times A'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A''' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 10 & 12 & 14 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



تمرین

برای مثال قبل ماتریس M را به گونه ای بدست آورید که:

$$A''' = M \times A$$